Probabilidades e Hidrodinâmica

Ana Bela Cruzeiro
abcruz@math.tecnico.ulisboa.pt

Grupo de Física-Matemática e
Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa

1. Introdução

As relações entre as Probabilidades e as Equações às Derivadas Parciais estão na base da construção de processos estocásticos, nomeadamente do movimento Browniano. Entre outros, lembremos alguns exemplos dessas relações. Seja B_t um movimento Browniano com valores em $\mathbb{R}^d$. Sabemos que

$$v(t,x) = E_x(f(B_t)),$$

onde E_x denota a esperança condicionada a $B_0 = x$, resolve a equação do calor, que por sua vez descreve a evolução do calor ao longo do tempo e numa certa região do espaço (neste caso simplesmente $\mathbb{R}^d$):

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v$$

com condição inicial f. Mais geralmente, soluções da equação às derivadas parciais $\partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v + b.\nabla v$ podem ser representadas probabilisticamente pela célebre fórmula de Girsanov,

$$v(t,x) = E_x\Big(f(B_t)\ \exp\ (\int_0^t b(B_s).dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(B_s)|^2 ds)\Big)$$

e soluções da equação $\partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v + Vv$ pela fórmula de Feynman-Kac,

$$v(t,x) = E_x\Big(f(B_t)\ \exp\ (\int_0^t V(B_s)ds)\Big).$$

Também equações estacionárias são passíveis de representação probabilística. Por exemplo a solução do problema de Dirichlet

$$\frac{1}{2}\Delta v + Vv = 0$$

num domínio regular D sujeito à condição de fronteira $v = g$ em ∂D, pode escrever-se (assumimos nesta introdução que todas as funções são regulares),

$$v(t,x) = E_x\Big(f(B_\tau)\ \exp\ (\int_0^\tau V(B_s)ds)\Big),$$

onde agora o limite superior de integração é o tempo aleatório $\tau = \inf\{t : B_t \notin D\}$, $B_0 = x$.

Todas estas fórmulas de representação probabilística se podem generalizar para o caso em que, em vez do Laplaciano, consideramos um operador (digamos, elíptico) da forma

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\partial^2_{i,j}f + b.\nabla f.$$

A chave da generalização encontra-se na possibilidade, descoberta por K. Itô nos anos cinquenta do século passado, de associar ao operador L uma equação diferencial estocástica,

$$dX_t = \sigma(X_t).dB_t + b(X_t)dt$$

onde dB_t refere ao diferencial em relação ao movimento Browniano conhecido como diferencial de Itô. Então as fórmulas de representação para as equações às derivadas parciais análogas às referidas acima onde se substitui o operador Laplaciano por L, escrevem-se substituindo o movimento Browniano pelo processo estocástico X_t.

Existe uma vasta literatura sobre as relações entre Análise Estocástica e Equações às Derivadas Parciais. Aqui citamos, a título de exemplo, [6], [14], [18], [20].

Todas as equações às derivadas parciais de que falámos até agora são lineares (L é um operador linear), mas existem também relações entre equações não lineares e processos estocásticos, uma classe das quais constitui o objecto deste artigo.

2. **A equação de Navier-Stokes**

Embora a teoria que passamos a expôr seja bastante mais geral, concentrar-nos-emos no caso da equação de Navier-Stokes que, como é sabido, modeliza o escoamento de fluidos viscosos e incompressíveis. Esta equação escreve-se,

$$\partial_t u = \nu \Delta u - (u.\nabla)u - \nabla p, \ \mathrm{div}\ u = 0.$$

A constante $\nu > 0$ representa a viscosidade, p a pressão, e a condição de divergência nula corresponde à incompressibilidade do fluido. De notar que a pressão não é um dado do problema, mas também uma incógnita.

Em Dinâmica dos fluidos é comum distinguir entre dois tipos de abordagem, a Euleriana, que refere à velocidade do fluido representada pelo campo de vectores u solução da equação de Navier-Stokes, e a abordagem Lagrangiana. Esta última consiste no estudo das trajectórias associadas ao movimento ou seja, dos fluxos integrais g que satisfazem

$$\partial_t g(t,x) = u(t, g(t,x)).$$

Aparentemente equivalentes, as duas abordagens não o são em geral, uma vez que nem sempre o campo de vectores velocidade tem regularidade suficiente para que exista solução da equação para o fluxo Lagrangiano.

Quando a viscosidade é nula, a equação de Navier-Stokes reduz-se à famosa equação de Euler incompressível, $\partial_t u = -(u.\nabla)u - \nabla p, \quad \mathrm{div}\ u = 0$.

Num célebre artigo de 1966, Vladimir Arnold ([5]) mostrou que a equação de Euler corresponde à equação de uma geodésica num certo espaço de funções. Mais precisamente as correspondentes trajectórias Lagrangianas são "pontos" críticos do funcional de acção dado pela energia cinética associada à norma L^2:

$$A\ [g] = \frac{1}{2}\int_0^T \int |\partial_t g(t)(x)|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T ||\dot{g}(t)||^2_{L^2(dx)} dt$$

onde L^2 refere à integração no espaço subjacente (aqui $\mathbb{R}^d$, mas mais geralmente uma variedade), $\dot{g}$ designa a derivada de g em relação ao tempo.

Com efeito, escrevendo $L(g, \dot{g}, t) = \frac{1}{2}||\dot{g}(t)||^2_{L^2(dx)}$ o Lagrangiano daquela acção, é simples deduzir que as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}) - \frac{\partial L}{\partial g} = 0$$

se reduzem a

$$\frac{d}{dt}[\dot{g}(t)] = 0$$

ou seja obtém-se, formalmente, a equação de Euler (no sentido fraco L^2). Devido à condição de incompressibilidade há que acrescentar *a posteriori* na equação um termo do tipo $-\nabla p(t)$, sendo $p(t)$ a pressão no instante t.

Uma referência bastante completa sobre este tema e sobre as consequências do uso de métodos topológicos e geométricos no estudo da equação de Euler é o livro [21].

A equação de Euler é um sistema conservativo (ou seja, a energia é conservada ao longo da evolução no tempo), contrariamente à equação de Navier-Stokes. A questão de saber se existe também uma formulação variacional para esta equação é portanto não trivial. A resposta é no entanto afirmativa, se recorrermos à Análise Estocástica, como veremos na próxima secção. Descreveremos igualmente que o termo Laplaciano da equação de Navier-Stokes está (naturalmente) associado ao movimento Browniano.

3. **Um princípio variacional estocástico**

De modo a generalizar o princípio variacional da equação de Euler, consideramos, em vez de trajectórias Lagrangianas regulares, soluções das seguintes equações diferenciais estocásticas:

$$dg_t^u = \sqrt{2\nu}dB_t + u(t, g_t^u)dt, \quad g_0^u = x$$

e escrevemos por vezes $g_t(x)$ de modo a sublinhar a dependência da condição inicial x.

Na realidade em certas aplicações consideram-se mais geralmente coeficientes de difusão não constantes, admitindo-se portanto correlações espaciais. Tal é o caso, em dinâmica dos fluidos, onde por vezes esses coeficientes de difusão são escolhidos a partir dos dados estatísticos observados (c.f. [17]).

Para campos de vectores suficientemente regulares estas equações definem fluxos (homeomorfimos) no espaço e, se impusermos a condição div $u = 0$ $\forall t$, esses fluxos conservam a medida de Lebesgue, ou seja tem-se

$$\int E(f(g_t^u(x)))dx = \int f(x)dx$$

para todo o t e f suficientemente regular.

A primeira dificuldade com que nos deparamos para escrever um funcional de acção é que os processos estocásticos g^u não são diferenciáveis no tempo. No entanto é possível definir a seguinte "derivada generalizada", denotada D_t:

$$D_t f(t, g_t^u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(E^{P_t} f(t+\varepsilon, g_{t+\varepsilon}^u) - f(t, g_t^u)\right)$$

onde E^{P_t} denota a esperança condicional relativamente à filtração P_t gerada pelo passado do processo no instante t. Do Cálculo de Itô sabemos que D é o gerador do processo g, ou seja que

$$D_t f(t, g_t^u) = (\nu\Delta f + (u.\nabla f) + \partial_t f)(t, g_t^u) \quad \text{q.s.}$$

Em particular $D_t g_t = u(t, g_t))$ *q.s.*, o que justifica a interpretação do *drift* (u) do processo estocástico como uma derivada.

Definimos então o seguinte funcional de acção estocástico sobre a classe de processos estocásticos g^u com coeficiente de difusão $\sqrt{2\nu}$ e *drift* u, como acima, onde $u \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d$:

$$A\,[g^u] = \frac{1}{2}E\int_0^T \int |Dg_t^u(x)|^2 dxdt.$$

A questão de saber se, apenas com a regularidade L^2 do *drift*, o processo estocástico g^u está bem definido e fornece um fluxo de homeomorfismos, não é uma questão trivial. De facto, em princípio este tipo de resultados exige muito mais regularidade. No entanto, e usando a condição div $u = 0$ é possível provar tais resultados, pelo menos no caso de se considerar, em vez do espaço $\mathbb{R}^d$, um toro (c.f. [8] para o caso de dimensão dois), o que corresponde a impôr condições periódicas no espaço às equações do movimento.

Finalmente, de modo a deduzir o princípio variacional, devemos precisar que tipo de variações são admissíveis. Escolhemos variações do tipo exponencial, nomeadamente

$$g_t^{u,\varepsilon,v} = e_t(\varepsilon v)(g_t^u),$$

onde

$$e_t(\varepsilon v)(x) = x + \varepsilon \int_0^t \partial_s v(s, e_s(\varepsilon v)(x))ds$$

com $\varepsilon > 0$ e onde $v(t,\cdot)$ é um campo de vectores regular, dependente do tempo, tal que $v(0) = v(T) = 0$ e div $v(t,\cdot) = 0$ para todo o $t \in [0,T]$.

Observe-se que, na primeira ordem em ε se está a variar nas direcções de v, uma vez que

$$e_t(\varepsilon v)(x) \simeq x + \varepsilon v(t,x).$$

Por definição g é ponto crítico de A se, para todo o v como acima, se tem

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} A\ [g^{u,\varepsilon,v}] = 0.$$

Pela fórmula de Itô,

$$dg_t^{u,\varepsilon,v} = \nabla e_t(\varepsilon v)(g_t^u)\sqrt{2\nu}dB_t + [\partial_t e_t(\varepsilon v) + (u.\nabla)e_t(\varepsilon v) + \nu\Delta e_t(\varepsilon v)](g_t^u)]dt$$

e, consequentemente,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} A\ [g_t^{u,\varepsilon}] = E\int_0^T\int (u(t,x).[\partial_t v + (u.\nabla)v + \nu\Delta v])\,(t,g_t^u)dtdx$$

Usando a invariância da medida de volume tem-se ainda

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} A\ [g_t^{u,\varepsilon,v}] = \int_0^T\int (u.[\partial_t v + (u.\nabla)v + \nu\Delta v])\,(t,x)dtdx$$

$$= -\int_0^T\int ([\partial_t u + (u.\nabla)u - \nu\Delta u].v)\,dtdx$$

onde usámos integração por partes, a condição div $u = 0$ e ainda o facto de $v(0) = v(T) = 0$.

Concluímos assim que a derivada do funcional de acção A quando se consideram as variações acima é igual a zero (ou seja, o processo estocástico g_t^u é crítico para A) se e só se o campo de vectores $u(t,\cdot)$ satisfaz a equação de Navier-Stokes no sentido fraco L^2.

O princípio variacional estocástico para a equação de Navier-Stokes que descrevemos foi introduzido em [8] no caso do toro de dimensão dois e posteriormente generalizado para variedades em [3] (ver igualmente o artigo [4]). Na base das ideias subjacentes estão os trabalhos [24] e [25]. De referir que existem diferentes tipos de abordagem probabilística àquela equação: [9], [15], [19], por exemplo.

4. **Equações diferenciais estocásticas " forward-backward"**

Com uma simples mudança de variável, nomeadamente considerando $\tilde{g}_t^u = g_t^{\tilde{u}}$, onde $\tilde{u}(t,x) = -u(T-t,x)$, e aplicando o Cálculo de Itô, facilmente verificamos que

$$D_t D_t \tilde{g}_t^u = \partial_t \tilde{u} + \tilde{u}.\nabla\tilde{u} + \nu\Delta\tilde{u}$$

$$= \partial_t u + u.\nabla u - \nu\Delta u$$

ou seja, se u verifica a equação de Navier-Stokes, então $D_t D_t \tilde{g}_t^u = -\nabla p_t$.

De outra forma, podemos escrever

$$d\tilde{g}_t^u = \sqrt{2\nu}dB_t + Y_t, \quad \tilde{g}_0^u = x$$

$$dY_t = dM_t - \nabla p_t$$

onde M_t designa uma martingala (o termo de difusão do processo estocástico $Y_t = \tilde{u}(t,\tilde{g}_t)$).

Este último par de equações é um sistema de equações "forward-backward" estocástico. Trata-se, no mundo das probabilidades, do sistema de equações mais próximo das de segunda ordem da Mecânica clássica. De modo a constituirem um problema bem posto à equação para Y_t deve ser dado um valor final Y_T o que corresponde, no nosso caso, a especificar o valor inicial de u, tal como no problema de Cauchy usual para a equação de Navier-Stokes.

As equações diferenciais estocásticas "forward-backward" são um tema de investigação bem conhecido, relacionado com a teoria do Controle Optimo. Entre muitas outras possíveis referências a este tema indicamos [13] e [22].

No entanto a situação que aqui nos interessa é bastante mais complicada. Em primeiro lugar, a imposição da condição de incompressibilidade obriga-nos a trabalhar não num espaço de dimensão finita (caso das referências acima), mas num espaço funcional, necessariamente de dimensão infinita. Em segundo lugar, conforme já observámos, a pressão não é um dado do problema, mas também uma incógnita. Ou seja, se podemos observar com facilidade que, partindo de uma solução da equação de Navier-Stokes se chega a um sistema diferencial estocástico "forward-backward", o problema recíproco (como chegar à solução de Navier-Stokes resolvendo um sistema "forward-backward" estocástico) não é simples. Para este problema fazemos referência aos artigos [11] e [12]. Neste último obtivémos um resultado de existência para a equação da vorticidade associada a Navier-Stokes no caso bidimensional. O primero trata da representação das soluções de Navier-Stokes em termos de sistemas "forward-backward" estocásticos.

5. **Generalizações**

O funcional de acção A considerado na secção 3 está definido sobre processos estocásticos g que tomam valores nos difeomorfismos do espaço de configurações subjacente. Este conjunto constitui um grupo (relativamente à composição) de dimensão infinita. Trata-se de facto "apenas" de um caso particular de uma teoria mais vasta, que poderemos chamar Mecânica Geométrica Estocástica. Na Mecânica Geométrica clássica são considerados princípios variacionais formulados em grupos de Lie, cujas equações do movimento correspondente são as equações de Euler-Poincaré (c.f. [16], [23]). O caso dos grupos de difeomorfismos dá origem precisamente à equação de Euler, mas muitas outras equações são assim obtidas, tanto em grupos de dimensão finita como de dimensão infinita.

Uma generalização estocástica da Mecânica Geométrica, e as correspondentes equações de Euler-Poincaré dissipativas, foi feita em [1] e continua actualmente a ser desenvolvida pelos seus autores e por outros colaboradores (c.f. por exemplo [7]). Várias questões são (e serão) investigadas, nomeadamente questões de existência e unicidade das equações (em vários sentidos), estudo das simetrias dos sistemas, métodos numéricos geométricos, etc. Outros modelos para além da equação de Navier-Stokes foram estudados (por exemplo as equações de Camassa-Holm e Leray-alpha dissipativas, c.f. [10]).

Finalmente observamos, embora a explicação devesse necessáriamente ser um pouco longa, que existe uma relação entre o tipo de problemas aqui expostos e a teoria do Transporte Optimo. Para os leitores interessados, referimos o recente trabalho [2].

References

[1] M. Arnaudon, X. Chen, A.B. Cruzeiro, *Stochastic Euler-Poincaré reduction*, J. Math. Phys. 55 (2014), 081507.

[2] *M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro, C. Léonard, J.-C. Zambrini*, An entropic interpolation problem for incompressible viscid fluids, arXiv:1704.02126

[3] M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro, *Lagrangian Navier-Stokes diffusions on manifolds: variational principle and stability*, Bull. Sci. Math., 136, 8 (2012), 857-881.

[4] M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro and N. Galamba, *Lagrangian Navier-Stokes flows: a stochastic model*, J. Phys A 44 no 17 (2011), 175501.

[5] V. I. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 316–361.

[6] R. F. Bass, *Diffusions and elliptic operators*, Springer-Verlag Probability and its Applications, 1998.

[7] X. Chen, A.B. Cruzeiro, T.S. Ratiu, *Stochastic variational principles for dissipative equations with advected quantities*, arxiv.org/pdf/1506.05024.pdf

[8] F. Cipriano, A.B. Cruzeiro, *Navier-Stokes equation and diffusions on the group of homeomorphisms of the torus*, Comm. Math. Phys. 275 (2007), no. 1, 255–269.

[9] P. Constantin, G. Iyer, *A stochastic Lagrangian representation of 3-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 61, 3 (2008), 330–345.

[10] A.B. Cruzeiro, G. Liu, *A stochastic variational approach to the viscous Camassa-Holm and Leray-alpha equations*, Stoch. Proc. and their Applic. 127, 1 (2017), 1–17

[11] A.B. Cruzeiro, E. Shamarova, *Navier-Stokes equations and forward-backward SDEs on the group of diffeomorphisms of the torus*, Stoch. Proc. and their Applic. 119 (2009), 4034–4060.

[12] A.B. Cruzeiro, Z. Qian, *Backward stochastic differential equations associated with the vorticity equation*, J. Funct. Anal. 267, 3 (2014), 660 –677.

[13] G. Dos Reis, *Some advances on quadratic BSDE: Theory - Numerics - Applications*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.
[14] R. Durret, *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, 1984.
[15] D.A. Gomes, *A variational formulation for the Navier-Stokes equation*, Comm. Math. Phys. 257, 1 (2005), 227–234.
[16] D.D. Holm, *Geometric Mechanics*, Vol. I, II, World Scientific, 2008.
[17] D.D. Holm, *Variational principles for stochastic fluid dynamics*, Proc.A. 475, 2176 (2015), 20140963.
[18] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland, 1981.
[19] A. Inoue, T. Funaki, *A new derivation of the Navier-Stokes equation*, Comm. Math. Phys. 65 (1979), 83–90.
[20] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian motion and Stochastic calculus*, Springer-Verlag, 1988.
[21] B. Khesin, *Groups and topology in the Euler hydrodynamics and KdV*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 2008.
[22] J. Ma, J. Yong, *Forward-backward stochastic differential equations and their applications*, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., 2007.
[23] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag Texts in Applied Math., 2002.
[24] T. Nakagomi, K. Yasue, J.-C. Zambrini, *Stochastic variational derivations of the Navier-Stokes equations*, Lett. Math. Phys. 160 (1981), 337–365.
[25] K. Yasue, *A variational principle for the Navier-Stokes equation*, J. Funct. Anal. 51 (1983), 133–141.